

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 19/01/15

- (1) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, tali che $\int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g = 100$. Preso $a > 0$ e posto

$$F(x, y) = f(-2y)g(ax + 3y)$$

stabilire se F è integrabile su \mathbb{R}^2 , e se sì, calcolare

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} F .$$

- (2) Sia E un insieme stellato rispetto all'origine in \mathbb{R}^2 , cioè tale che per ogni $x \in E$ si abbia anche che il segmento $\overline{0x} \subset E$. Per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$ si ponga

$$E_{\vartheta} = \{r > 0 | (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \in E\} .$$

Provare che se E è misurabile in \mathbb{R}^2 , allora la funzione

$$f(\vartheta) = \mu_1(E_{\vartheta})$$

è misurabile su $[0, 2\pi]$. Esprimere $\mu_2(E)$ in termini di f . Qui μ_k indica la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^k , $k = 1, 2$.

- (3) Sia a_n una successione di numeri reali, sia

$$\varphi(x) = e^{-x^2} , \quad x \in \mathbb{R}$$

e si ponga

$$f_n(x) = 2^n \varphi(2^n(x - a_n)) , \quad x \in \mathbb{R} , n = 1, 2, \dots .$$

Stabilire se esiste, e in quale senso,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

e se vale

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n .$$